

Laura Covelo, María Eugenia Covelo

MATEMÁTICA 4



NES

Muestra distribuida por la editorial

Índice

CAPÍTULO 1	
NÚMEROS REALES	7
RECORDANDO LO APRENDIDO	8
REALES EN LA RECTA NUMÉRICA.....	9
OPERACIONES CON NÚMEROS IRRACIONALES	11
Suma y resta	11
MULTIPLICACIÓN CON NÚMEROS IRRACIONALES	13
Radicales de igual índice	13
Radicales con diferentes índices	14
RAÍCES DE EXPONENTE FRACCIONARIO	16
DIVISIÓN DE NÚMEROS IRRACIONALES	17
RACIONALIZACIÓN DE DENOMINADORES.....	19
ACTIVIDADES INTEGRADORAS.....	23
 CAPÍTULO 2	
SUCESIONES, INTERVALOS E INECUACIONES	25
RECORDANDO LO APRENDIDO	26
SUCESIONES	27
Sucesiones aritméticas	27
Sucesiones geométricas.....	28
INTERVALOS NUMÉRICOS E INECUACIONES	30
ACTIVIDADES INTEGRADORAS.....	36
 CAPÍTULO 3	
EXPRESIONES ALGEBRAICAS	39
RECORDANDO LO APRENDIDO	40
POLINOMIOS	41
Términos semejantes	41
Valor numérico.....	43
OPERACIONES CON POLINOMIOS.....	45
Suma y resta	45
Multiplicación	45
División	49
ACTIVIDADES INTEGRADORAS.....	54

CAPÍTULO 4
FACTOREO 56

RECORDANDO LO APRENDIDO 57

CASOS DE FACTOREO 58

 1. Factor común 58

 2. Raíces 59

 3. Teorema de Gauss 59

 4. Polinomios de grado 2 60

 5. Diferencia de cuadrados 61

EXPRESIONES ALGEBRAICAS FRACCIONARIAS 65

 Simplificación 65

OPERACIONES ALGEBRAICAS FRACCIONARIAS 67

 Suma y resta 67

 Multiplicación 68

 División 68

ACTIVIDADES INTEGRADORAS 69

CAPÍTULO 5
ECUACIONES, INECUACIONES Y COMBINATORIA 71

RECORDANDO LO APRENDIDO 72

ECUACIONES E INECUACIONES CON MÓDULO 74

 Ecuaciones 74

 Inecuaciones 75

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO 77

COMBINATORIA 79

 Combinaciones 80

 Variaciones 81

 Permutaciones 81

ACTIVIDADES INTEGRADORAS 83

CAPÍTULO 6
FUNCIONES 86

RECORDANDO LO APRENDIDO 87

GRÁFICOS DE FUNCIONES 89

ANÁLISIS DE FUNCIONES 91

 Raíces 91

 Ordenada 91

 Intervalos 91

 Máximos y mínimos 92

FUNCIÓN LINEAL 93

 Gráfico conociendo la ordenada y la pendiente 94

 Gráfico a partir de la ordenada y la raíz 95

 Ecuación de la recta a partir de la pendiente y un punto 96

Ecuación de la recta conociendo dos puntos	96
Posición de dos rectas en el plano	97
Sistemas de ecuaciones	97
FUNCIÓN CUADRÁTICA	101
Raíces	101
Vértice	102
Eje de simetría y ordenada	103
Dominio e imagen	104
FUNCIÓN POLINÓMICA	107
Teorema de Bolzano-Weierstrass.....	108
FUNCIÓN EXPONENCIAL	111
FUNCIÓN LOGARÍTMICA	111
ACTIVIDADES INTEGRADORAS	113
 CAPÍTULO 7	
TRIGONOMETRÍA	115
 RECORDANDO LO APRENDIDO	116
TRIGONOMETRÍA	121
Triángulos rectángulos	121
Triángulos oblicuángulos	123
ACTIVIDADES INTEGRADORAS	125
 BIBLIOGRAFÍA	128



Conseguí este
título en formato
digital.



Muestra distribuida por la editorial

Recordando lo aprendido

Para comenzar este capítulo, vamos a recordar cómo fue que los números llegaron a sus vidas.

Seguro que no recuerdan cuándo fue que descubrieron el 1 o aprendieron a decir 3 cuando les preguntaban su edad, pero así fue como lentamente los números cobraron sentido en sus vidas.

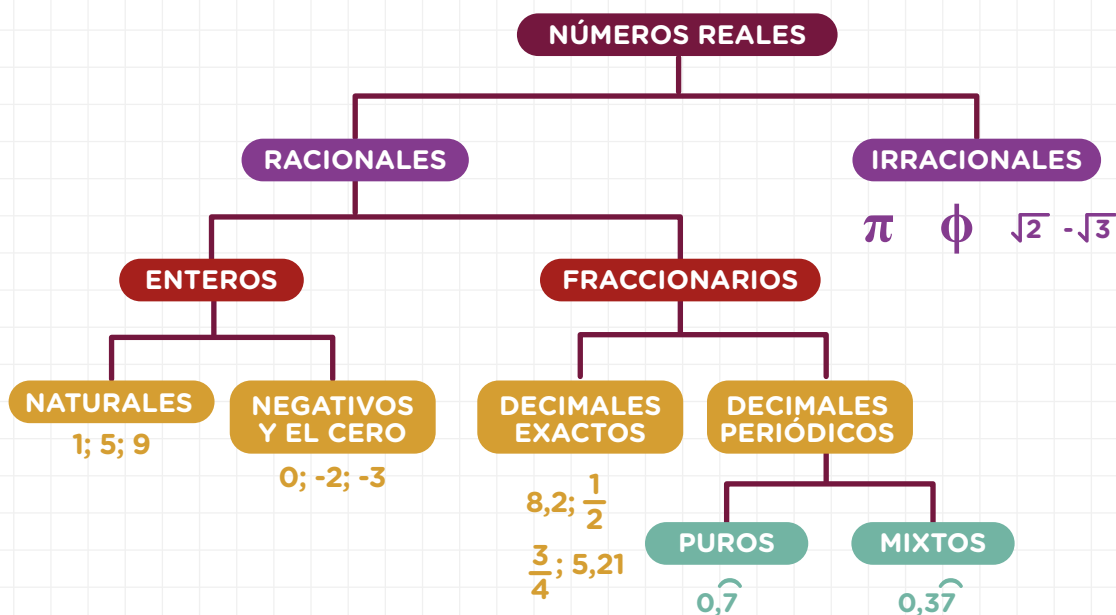
Comenzaron el jardín y cantando y jugando contaron hasta 10. En la primaria, la lista de números empezó a crecer y llegaron las operaciones, pudieron sumar y restar. Fueron creciendo y repartieron de manera exacta objetos hasta que un día las cuentas de dividir dejaron de ser exactas. Así, descubrieron los **fracciones**.

¡Listo! Llegaron a la secundaria y a todos los números que conocían se les agregaron los negativos. En tercer año, cuando pensaban que ya nada nuevo podía aparecer, un docente les cuenta que hay números que no se pueden expresar como fracciones y tienen un nombre tan raro como ellos, los **irracionales**, ¿se acuerdan?

Todos estos números forman un conjunto que recibe el nombre de **reales**, pero la historia no termina ahí, los próximos años descubrirán que hay otro conjunto numérico donde encontrarán a ciertos números que no se pueden representar en una recta, sino que necesitan un plano (ejes cartesianos), por ejemplo, $\sqrt{-16}$.

En este primer capítulo, vamos a trabajar con los reales y terminar de conocer sus propiedades y operaciones.

El conjunto de los números reales incluye a otros subconjuntos que se nombraron en los párrafos anteriores.



¡A PENSAR!

Trabajen en grupos y completen:

- a. El conjunto de los números naturales se simboliza y está formado por
- b. Su primer elemento es y el último
- c. Todo número natural sucesor y se obtiene
- d. Todo número, excepto el 1, tiene ya que
- e. Decimos que los naturales forman un conjunto porque
- f. El conjunto de los números enteros se representa con la letra y está formado por
- g. Su primer elemento es y el último
- h. Si a un número entero le sumamos 1, obtenemos su y si restamos 1,
- i. Este conjunto es discreto ya que
- j. Todo número entero tiene su que se encuentra a la misma distancia del 0 que él.
- k. La letra representa a los racionales.
- l. Estos números son aquellos que pueden expresarse como
- m. El conjunto es porque entre dos racionales hay racionales.
- n. Los números que poseen infinitas cifras decimales iguales se llaman
- o. Los irracionales se representan con y son aquellos números que poseen infinitas cifras decimales, por lo tanto, no pueden expresarse como
- p. Hay irracionales muy conocidos, por ejemplo,

Reales en la recta numérica

Los **números reales** se representan en la recta numérica: a cada punto de la recta, le corresponde un número real y, a cada número real, le corresponde un punto de la recta.

En particular, vamos a representar a los irracionales, ya que, por sus características, requieren un poquito más de trabajo.

Vamos a usar el teorema de Pitágoras como ayuda.

Capítulo 1

1° paso: sobre la recta numérica, construimos un triángulo rectángulo cuyos catetos sean de 1 cm y llamamos x a la hipotenusa.

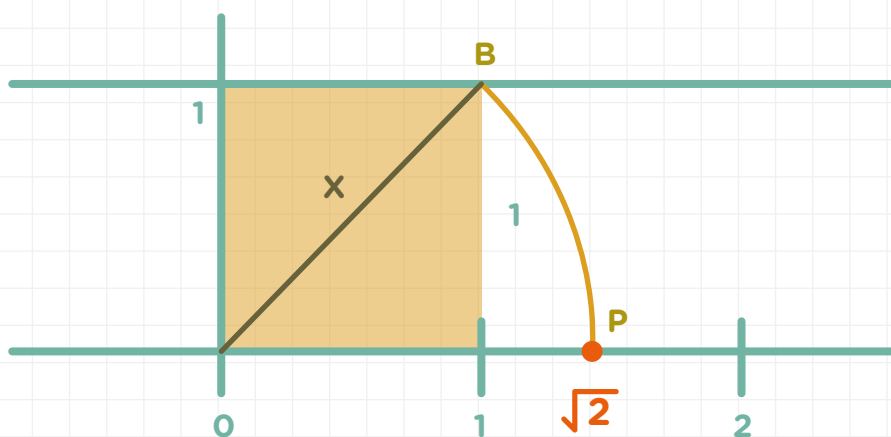
2° paso: calculamos la hipotenusa:

$$x^2 = 1^2 + 1^2$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \sqrt{2}$$

3° paso: ya sabemos que el valor de la hipotenusa es $\sqrt{2}$. Con la ayuda de un compás, podemos tomar su longitud (distancia del 0 al punto B). Luego, pinchamos con la punta del compás en 0 y marcamos un arco de circunferencia con la medida tomada. El punto donde el arco corte a la recta será el lugar en el que ubicaremos al número irracional $\sqrt{2}$ (longitud desde el 0 al punto B).

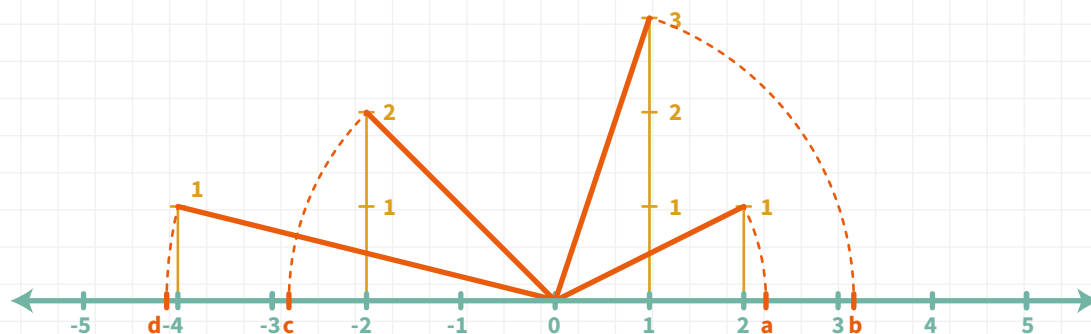


Este procedimiento nos permite ubicar los irracionales que surgen de resolver raíces cuadradas, no así los que se originan a partir de raíces de otro índice. ¿Por qué?

1. Ubiquen los siguientes números en la recta:

-4 ; $\sqrt{10}$; $\sqrt{8}$; $1,5$; $-\sqrt{5}$; 3

2. Indiquen los números que se representaron en la siguiente recta:



3. Representen en la recta $\sqrt{6}$. ¿Se puede representar un irracional a partir de otro irracional?

ACTIVIDAD

1. Extraigan factores:

- a. $\sqrt{50}$ d. $\sqrt{80}$ f. $5 \cdot \sqrt[3]{81}$
 b. $\sqrt{32}$ e. $\sqrt[5]{192}$ g. $\frac{3}{5} \cdot \sqrt{150}$
 c. $\sqrt[3]{24}$

2. Ubiquen en la recta los siguientes pares de números. Luego, compartan las respuestas con la clase y extraigan conclusiones.

- a. $\sqrt{27}$ y $3 \cdot \sqrt{3}$
 b. $\sqrt{20}$ y $2 \cdot \sqrt{5}$
 c. $6\sqrt{2}$ y $\sqrt{72}$

3. Unan con flechas las expresiones equivalentes:

- a. $\sqrt{12}$ $5\sqrt[3]{2}$
 b. $\sqrt[3]{24}$ $7\sqrt{2}$
 c. $\sqrt[3]{250}$ $2\sqrt[3]{3}$
 d. $\sqrt{98}$ $2\sqrt{3}$

Operaciones con números irracionales

Suma y resta

¿Cómo se suman los números que tienen infinitas cifras decimales no periódicas? Antes de comenzar, miren el siguiente gráfico:

$$\heartsuit \heartsuit \heartsuit + \apple \apple = ?$$

De la misma manera que no podemos sumar corazones y manzanas, tampoco podemos sumar raíces distintas.

Por ejemplo, $\sqrt{7} + \sqrt{5}$ queda expresado de esta forma, ya que al tener infinitas cifras decimales no estaríamos siendo exactos en el resultado.

Ahora bien, en el caso

$$\apple \apple + \apple = \apple \apple \apple$$



PARA SABER MÁS

Extraer factores de una raíz nos permite encontrar expresiones equivalentes.

Por ejemplo, $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Vamos a ver por qué es así:

$$\sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2}$$

Es importante que podamos reconocer las propiedades que se aplicaron.

1° paso: factorizamos el 8.

2° paso: expresamos como producto asociando según sea conveniente. En este caso, como potencias de 2.

3° paso: al ser una multiplicación, podemos aplicar la propiedad distributiva.

4° paso: simplificamos la raíz con el exponente cuando es posible.



Capítulo 1

Como verán, en este caso, sí podemos sumar porque son **semejantes**; con las raíces, pasa lo mismo. Por ejemplo:

$$3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

Recordemos que las raíces son semejantes si coinciden en índice y radicando.

$$\begin{array}{c} \text{índice} \rightarrow n \sqrt[n]{a} = b \\ \begin{array}{l} \text{radical} \downarrow \\ \text{raíz} \downarrow \\ \text{radicando} \uparrow \end{array} \end{array}$$

En conclusión, para sumar o restar, debemos asociar los términos semejantes.

Otro ejemplo:

$$\sqrt{2} + \sqrt[3]{5} - \sqrt{7} + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{7} - 2\sqrt[3]{5} =$$

Reconocemos los términos semejantes.

$$\sqrt{2} + \sqrt[3]{5} - \sqrt{7} + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{7} - 2\sqrt[3]{5} =$$

Asociamos los términos semejantes.

$$(\sqrt{2} + 3\sqrt{2}) + (\sqrt[3]{5} - 2\sqrt[3]{5}) + (-\sqrt{7} + 3\sqrt{7}) =$$

Operamos.

$$4\sqrt{2} - \sqrt[3]{5} + 4\sqrt{7}$$

Este es el resultado final, ya que los términos no son semejantes entre sí, por lo cual no se puede seguir operando, sería como sumar corazones con manzanas y zanahorias.

1. Resuelvan:

a. $\sqrt{5} + 3\sqrt{5} =$

d. $\sqrt{10} - 4\sqrt{10} =$

b. $\frac{3}{4}\sqrt[3]{7} + \frac{1}{4}\sqrt[3]{7} =$

e. $\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{7} + 3\sqrt[3]{7} - 5\sqrt[3]{7} =$

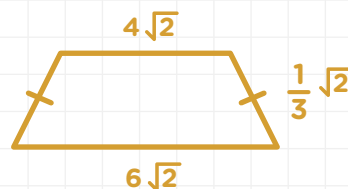
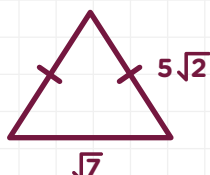
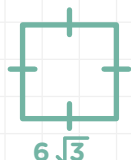
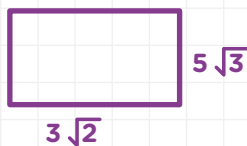
c. $5\sqrt{41} + 3\sqrt{11} + \frac{7}{2}\sqrt{41} - \frac{1}{2}\sqrt{11} =$

f. $\frac{3}{4}\sqrt{5} + 7\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + \sqrt{3} - \frac{1}{4}\sqrt{5} =$

2. Indiquen si la siguiente igualdad es verdadera, expliquen su respuesta.

$$\frac{3\sqrt{6}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{6}$$

3. Calculen el perímetro de las siguientes figuras:



4. En grupos, piensen y expliquen el error que se cometió en cada caso.

a. $^2\sqrt{5} - ^3\sqrt{4} = ^5\sqrt{9}$ b. $^2\sqrt{6} - ^2\sqrt{2} = ^2\sqrt{4} = 2$ c. $3 \cdot ^3\sqrt{10} + 2 \cdot ^3\sqrt{10} = 6 \cdot ^3\sqrt{10}$

5. Trabajen en parejas y resuelvan el siguiente ejercicio con su compañero. Luego, graben un videotutorial para compartir con la clase.

$$6 \cdot ^2\sqrt{7} + ^2\sqrt{28} + ^2\sqrt{3} - ^2\sqrt{27} =$$

6. Para pensar y no olvidar. Expliquen sus respuestas.

a. ¿Es lo mismo $^{-3}\sqrt{3}$ y $^3\sqrt{-3}$?

b. ¿Son equivalentes las expresiones $^2\sqrt{5}$ y $^6\sqrt{5^3}$?

c. ¿Podríamos sumar $^3\sqrt{7}$ y $^3\sqrt{56}$?

d. ¿Hay alguna diferencia entre $5\sqrt{7}$ y $\sqrt{7} \cdot 5$?

Multiplicación con números irracionales

Antes de comenzar con la multiplicación de números irracionales, es necesario recordar algunas propiedades.

¿Cuáles de estas igualdades son verdaderas? ¿Por qué? ¿Se acuerdan?

a. $\sqrt{6+8} = \sqrt{6} + \sqrt{8}$

d. $^2\sqrt{5} \cdot ^3\sqrt{6} = ^5\sqrt{5 \cdot 6}$

b. $\sqrt{8} : \sqrt{3} = \sqrt{8 : 3}$

e. $\sqrt{6} - \sqrt{2} = \sqrt{4}$

c. $^3\sqrt{5 \cdot 6} = ^3\sqrt{5} \cdot ^3\sqrt{6}$

f. $^3\sqrt{^2\sqrt{8}} = ^6\sqrt{8}$

Radicales de igual índice

Para resolver estas multiplicaciones, aplicaremos la inversa de la distributiva. Por ejemplo:

$$^3\sqrt{6} \cdot ^3\sqrt{3} = ^3\sqrt{6 \cdot 3} = ^3\sqrt{18}$$

En la multiplicación, puede ocurrir que nos encontremos con una combinación de números racionales e irracionales.

$$5\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{2}$$

La propiedad conmutativa y la asociativa se cumplen en los números irracionales con respecto a la multiplicación.

$$5 \cdot 6 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} =$$

$$30 \cdot \sqrt{3 \cdot 2} =$$

Inversa de la distributiva

$$30 \cdot \sqrt{6}$$

Operamos

Veamos otro ejemplo:

$$\frac{3}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot (-5\sqrt{6})$$

Seguimos la misma lógica conmutando y asociando:

$$\frac{3}{2} \cdot (-5) \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{6}$$

Resolvemos sin olvidarnos de aplicar la regla de los signos:

$$-\frac{15}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot 6} = -\frac{15}{2} \cdot \sqrt{12} = -\frac{15}{2} \sqrt{2^2 \cdot 3} = -\frac{15}{2} \cdot 2\sqrt{3} = -15\sqrt{3}$$

Radicales con diferentes índices

Cuando nos encontramos con raíces de diferente índice, no podemos aplicar la propiedad inversa de la distributiva.

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{6} = ?$$

En estos casos, debemos unificar los índices. Para eso, recordemos cómo se simplifican las raíces y potencias.

$$^{15}\sqrt{2^5} = \sqrt[3]{2}$$

En este caso, como índice y potencia tienen un divisor común, se puede simplificar dividiendo ambos por ese número. En nuestro ejemplo, se dividió por 5.



PARA SABER MÁS

Al simplificar, hay que contemplar el signo del radicando y si el índice es par o impar. Vamos a ver por qué:

$\sqrt[4]{(-9)^2}$ Al simplificar, quedaría $\sqrt[2]{(-9)}$ La cual no tiene solución en el conjunto de los números reales.

Veamos qué pasa si resolvemos sin simplificar:

$\sqrt[4]{(-9)^2} = \sqrt[4]{81} = 3$ Al resolver la potencia y ser par, el radicando queda positivo y ahora sí podemos encontrar el resultado.

Por lo tanto, para simplificar, en el caso de ser un **radicando negativo**, vamos a tener en cuenta lo siguiente:

Si n es par, $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ El resultado es igual al valor absoluto del radicando (a).

Si n es impar, $\sqrt[n]{a^n} = a$ El resultado es igual al radicando (a).

De la misma forma en la que se puede simplificar, podemos **amplificar**, esto sería multiplicar el índice y el exponente por el mismo número.

$$^3\sqrt{7} = ^{3 \cdot 3}\sqrt{7^{1 \cdot 3}} = ^9\sqrt{7^3}$$

Ahora piensen el ejercicio $\sqrt{2} \cdot ^3\sqrt{6}$, teniendo en cuenta lo que vimos. ¿Cuál puede ser un índice común a ambas raíces?

Entre 2 y 3, un múltiplo común puede ser 6.

$$^{2 \cdot 3}\sqrt{2^{1 \cdot 3}} \cdot ^{3 \cdot 2}\sqrt{6^{1 \cdot 2}} =$$

$$^6\sqrt{2^3} \cdot ^6\sqrt{6^2} = ^6\sqrt{2^3 \cdot 6^2}$$

Ahora pueden resolver el producto de la forma que ya aprendieron, aplicando la inversa de la distributiva.

¡A PENSAR!

1. Completen con **Siempre**, **A veces** o **Nunca** según corresponda.

- a. El producto de dos números irracionales da como resultado un número irracional.
- b. Los números irracionales con distinto índice se pueden multiplicar.
- c. Si poseen igual índice, pero distinto radicando se pueden multiplicar.

2. Resuelvan:

a. $^3\sqrt{5} \cdot ^3\sqrt{7} =$

f. $\sqrt{3} \cdot (5 + \sqrt{7}) =$

b. $5\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{6} =$

g. $(6 - \sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{11}) =$

c. $7 \cdot (\sqrt{5} + 3) =$

h. $(\sqrt{3} - \sqrt{15}) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{8}) =$

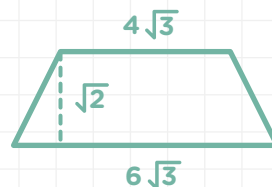
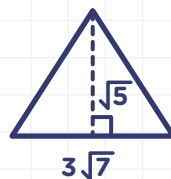
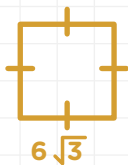
d. $-2 \cdot (^3\sqrt{11} - \sqrt{5}) =$

i. $^3\sqrt{4} \cdot \frac{7}{5} \cdot ^3\sqrt{9} =$

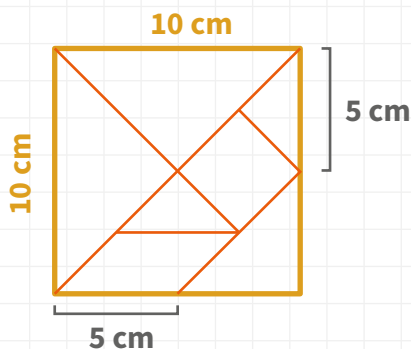
e. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{7} =$

j. $\sqrt{5} \cdot ^3\sqrt{5} =$

3. Calculen el área de las siguientes figuras:



4. Construyan un tangram a partir de un cuadrado de 10 cm de lado. Luego, calculen el perímetro de cada figura obtenida.



5. Analicen los siguientes casos y expliquen las conclusiones obtenidas.

$$^2\sqrt{(-3)^2} = -3 \quad \text{Ya que simplificamos la raíz y el exponente}$$

$$^2\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 \quad \text{Resolvemos primero la potencia y, luego, la raíz.}$$

6. Resuelvan los siguientes cálculos combinados:

$$\text{a. } 4 + ^2\sqrt{6} - 3 \cdot ^2\sqrt{2} \cdot 9 \cdot ^2\sqrt{3} = \quad \text{c. } ^3\sqrt{10} + 2 \cdot ^3\sqrt{5} \cdot (^3\sqrt{2} + 6 \cdot ^3\sqrt{3}) = \quad \text{e. } (\sqrt{3} - 5) \cdot (\sqrt{3} + 5) =$$

$$\text{b. } (\sqrt{7} - \sqrt{15}) \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{15}) = \quad \text{d. } 2 \cdot \sqrt{45} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{125} - \frac{7}{4} \cdot \sqrt{180} =$$

Raíces de exponente fraccionario

Las raíces pueden ser expresadas como potencias.

$$^b\sqrt{a^c} = a^{\frac{c}{b}}$$

Este recurso es muy útil cuando tenemos raíces de diferente índice, pero igual radicando.

Por ejemplo:

$$^3\sqrt{5} \cdot ^4\sqrt{5^3} = 5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{3}{4}}$$

Ahora como las bases son iguales podemos aplicar la propiedad de las potencias:

$$5^{\frac{1}{3} + \frac{3}{4}} = 5^{\frac{13}{12}} = ^{12}\sqrt{5^{13}} = 5 \cdot ^{12}\sqrt{5}$$

¿Por qué no sería útil si los radicandos fueran distintos?

1. Expresen las siguientes raíces como potencias fraccionarias:

$$\text{a. } ^5\sqrt{3^2} = \quad \text{b. } ^3\sqrt{2^7} = \quad \text{c. } \sqrt[4]{\left(\frac{3}{4}\right)^5} = \quad \text{d. } ^3\sqrt{(-3)^{11}} = \quad \text{e. } ^4\sqrt{-\left(\frac{2}{5}\right)^3} =$$

2. Resuelvan aplicando propiedades:

$$\text{a. } \sqrt{5} \cdot \sqrt{5^3} \cdot ^3\sqrt{5} = \quad \text{c. } 2\sqrt{7} \cdot ^3\sqrt{7^2} \cdot ^5\sqrt{7^3} = \quad \text{e. } ^3\sqrt{\frac{4}{5}} \cdot 6 \cdot ^5\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^4} =$$

$$\text{b. } 3^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{3} \cdot 3^{\frac{1}{5}} = \quad \text{d. } (-5)^{\frac{1}{4}} \cdot (-5)^{\frac{2}{3}} \cdot ^5\sqrt{(-5)^3} =$$

3. Unan con flechas:

a. $3^{\frac{3}{7}}$ ${}^7\sqrt{3^3}$

b. $3^{\frac{7}{3}}$ ${}^3\sqrt{3^7}$

c. $3^{\frac{1}{3}}$ ${}^3\sqrt{3^1}$

4. Resuelvan las siguientes multiplicaciones:

a. $(\sqrt{3} - 5) \cdot (\sqrt{3} + 5) =$ c. ${}^3\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} =$ e. $(\sqrt{7} + 4) \cdot (\sqrt{7} - 4) =$ g. $\sqrt{7} \cdot 4 \sqrt{7} =$

b. ${}^7\sqrt{3^4} \cdot {}^7\sqrt{3^3} =$ d. ${}^3\sqrt{2} \cdot {}^3\sqrt{2^2} =$ f. $(\sqrt{2} + \sqrt{6}) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{6}) =$

Luego de resolver, comparen los resultados y, en grupos, extraigan sus conclusiones. ¡Atención! En próximas clases, vamos a utilizar estos productos.

División de números irracionales

Para dividir números irracionales, vamos a seguir un procedimiento similar a la multiplicación al recordar que:

$${}^m\sqrt{a : b} = {}^m\sqrt{a} : {}^m\sqrt{b}$$

Por lo tanto, si tenemos:

${}^5\sqrt{30 : 7} = {}^5\sqrt{30} : {}^5\sqrt{7}$ Al ser una igualdad se puede leer en doble sentido.

Veamos el siguiente ejemplo:

$${}^3\sqrt{21 : 3} = {}^3\sqrt{21} : {}^3\sqrt{3} = {}^3\sqrt{7}$$

Podemos ver cómo se han dividido los dos números irracionales.

Pensemos este otro caso:

$$5 \sqrt{6} : 3 \sqrt{2} =$$

$$5 : 3 \cdot \sqrt{6} : \sqrt{2} =$$

$$\frac{5}{3} \sqrt{6 : 2} =$$

$$\frac{5}{3} \sqrt{3}$$



PARA SABER MÁS

La división también se puede expresar con la línea de fracción:

$$\frac{5 \cdot \sqrt{6}}{3 \cdot \sqrt{2}} = \frac{5}{3} \cdot \sqrt{\frac{6}{2}} = \frac{5}{3} \sqrt{3}$$

Capítulo 1

Al dividir, también nos podemos encontrar con casos en los que los índices de las raíces son distintos. Al igual que en la multiplicación, debemos amplificar la expresión para unificar los índices y poder aplicar las propiedades correspondientes.

Por ejemplo

${}^3\sqrt{7} \cdot {}^4\sqrt{3} =$ Buscamos un múltiplo de 3 y 4, y aplicamos al índice y radicando.

$${}^{3 \cdot 4}\sqrt{7^4 \cdot 3^3} =$$

$${}^{12}\sqrt{7^4 \cdot 3^3}$$

También, en la división, podemos trabajar con un exponente fraccionario si nos encontramos que los radicandos son iguales.

Veamos el siguiente ejemplo:

$${}^3\sqrt{5^2} : {}^4\sqrt{5^3} =$$

$5^{\frac{2}{3}} : 5^{\frac{3}{4}} =$ Expresamos las raíces como exponentes fraccionarios.

$5^{\frac{2}{3} - \frac{3}{4}} =$ Aplicamos propiedades de la potencia.

$5^{-\frac{1}{12}} =$ Aquí podemos nuevamente expresarlo como radical.

${}^{12}\sqrt{5^{-1}} =$ Podemos dar un paso más y resolver el exponente negativo.

$${}^{12}\sqrt{\frac{1}{5}}$$

¡A PENSAR!

1. Resuelvan las siguientes divisiones utilizando el procedimiento más conveniente:

a. ${}^3\sqrt{15} : {}^3\sqrt{3} =$ e. $8 {}^4\sqrt{27} : (2 {}^4\sqrt{9}) =$

b. $\frac{2}{3} \sqrt{20} : \left(\frac{6}{5} \sqrt{2}\right) =$ f. ${}^3\sqrt{15} : \sqrt{2} =$

c. $6 {}^4\sqrt{27} : (3 {}^3\sqrt{3}) =$ g. ${}^5\sqrt{8} : {}^2\sqrt{3} =$

d. $7 {}^3\sqrt{5} : {}^2\sqrt{125} =$ h. $\frac{3}{7} {}^5\sqrt{2} : {}^4\sqrt{2^3} =$

2. Escriban, en sus carpetas, un cálculo que dé como resultado lo escrito en cada ítem.

a. $\sqrt{5} =$

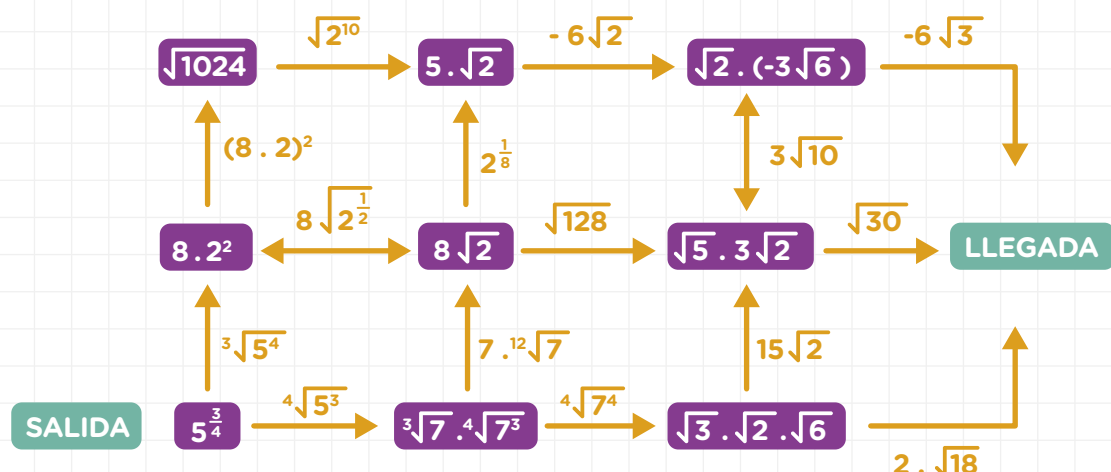
b. ${}^3\sqrt{10} =$

c. ${}^5\sqrt{3^4} =$

d. $\frac{5}{3} {}^3\sqrt{11} =$

e. $4 \cdot 5^{\frac{3}{5}} =$

3. Resuelvan el siguiente laberinto para llegar a la salida. Busquen la respuesta correcta a cada expresión en los rectángulos violetas.



4. Federico faltó a la clase de matemática donde se explicó la división de números irracionales. En grupos, graben un videotutorial para que Federico comprenda lo trabajado en clase.
5. ¡Qué horror! Escriban los errores que pueden surgir al resolver operaciones con irracionales, explicando cuál es el procedimiento incorrecto, por ejemplo:

$${}^6\sqrt{10} : {}^4\sqrt{2} = {}^{6-4}\sqrt{10:2} = \sqrt{5}$$

Cuando los índices son distintos, hay que amplificar para obtener índices iguales y, recién ahí, se podrá aplicar la propiedad inversa de la distributiva.

Ahora les toca a ustedes pensar cuáles son los horrores que se pueden cometer.

Racionalización de denominadores

Al realizar divisiones, puede ocurrir que queden números irracionales en denominadores de fracciones, por ejemplo:

$$\sqrt{5} : \sqrt{15} = \sqrt{5 : 15} = \sqrt{\frac{5}{15}} = \sqrt{\frac{1}{3}} \quad \text{podemos distribuir la raíz} \quad \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Para trabajar y tener mejor noción del número que tenemos, en matemática, evitamos que queden raíces en los denominadores.

Al racionalizar un denominador lo que lograremos es encontrar una expresión equivalente, cuyo denominador no tenga un radical.

Para continuar, debemos recordar que, para obtener fracciones equivalentes, multiplicamos numerador y denominador por un mismo número.

Por ejemplo:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \quad \text{Para } b \text{ y } n \neq 0 \quad \frac{5}{3} = \frac{5 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{10}{6}$$

Capítulo 1

Este criterio es el que vamos a aplicar.

En el ejemplo anterior, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ debemos buscar una expresión que, al ser multiplicada en el numerador y el denominador, logre que ya no quede un irracional en este último.

$$\frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ o } \frac{1}{3} \sqrt{3}$$

Como el índice y la raíz son iguales, podemos cancelar (noten que la potencia afecta a la raíz y no al radicando).

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{b} = \frac{a}{b} \sqrt{b}$$

Cuando el denominador es una raíz cuadrada única, multiplicamos por ella al numerador y denominador. Así, podemos simplificar la expresión, sacando la raíz del denominador.

Pensemos la siguiente situación:

$\frac{5 \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}}$ En este caso, si multiplicamos por $\sqrt[3]{2}$ no podemos simplificar, por lo tanto, debemos recurrir a otro método.

$$\frac{5 \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \frac{5 \sqrt[3]{3 \cdot 2^2}}{\sqrt[3]{2 \cdot 2^2}} = \frac{5 \sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{5 \sqrt[3]{12}}{2} = \frac{5}{2} \sqrt[3]{12}$$

Hemos multiplicado por un número irracional de igual índice, pero al radicando le aplicamos la potencia necesaria para que luego se iguale al índice y se pueda simplificar. Notarán que aplicamos propiedades de la potencia.

$$\frac{a}{n\sqrt[n]{b^x}} = \frac{a \cdot n\sqrt[n]{b^c}}{n\sqrt[n]{b^x} \cdot n\sqrt[n]{b^c}} = \frac{a \cdot n\sqrt[n]{b^c}}{n\sqrt[n]{b^x \cdot b^c}} = \frac{a \cdot n\sqrt[n]{b^c}}{n\sqrt[n]{b^{x+c}}}$$

Se debe cumplir que $x + c = n$

De esta manera, se simplifican índice y potencia.

$$\frac{a \cdot n\sqrt[n]{b^c}}{b} = \frac{a}{b} n\sqrt[n]{b^c}$$

Cuando el denominador es un radical con índice mayor a 2, multiplicamos el numerador y el denominador por una raíz de igual índice a la dada con igual radicando, pero agregándole las potencias necesarias para igualar al índice y, así, simplificar.

Puede ocurrir que, en el denominador, nos encontremos con un binomio que contenga irracionales de índice 2, por ejemplo:

$$\frac{3}{(2 + \sqrt{3})}$$

¿Recuerdan que hace unas clases resolvimos unas multiplicaciones cuyos resultados eran muy particulares?



PARA SABER MÁS

Llamamos **binomios conjugados** a aquellos que difieren solo en el signo de uno de los términos y al realizar el producto obtenemos la diferencia de cada término elevado al cuadrado.

$(a + b)$ y $(a - b)$ son binomios conjugados, al multiplicarlos obtenemos $a^2 - b^2$

Por ejemplo:

$$(3 - \sqrt{2}) \cdot (3 + \sqrt{2}) = \quad \text{Aplicamos la distributiva.}$$

$$3^3 + 3 \cdot \sqrt{2} - 3\sqrt{2} - \sqrt{2}^2 = \quad \text{Cancelamos los términos semejantes con signos opuestos.}$$

$$3^3 - \sqrt{2}^2 = \quad \text{Podemos simplificar la raíz con la potencia.}$$

$$9 - 2 = 7$$

En la expresión $\frac{3}{(2 + \sqrt{3})}$, vamos a multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado del denominador.

$$\frac{3}{(2 + \sqrt{3})} \cdot \frac{(2 - \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})} = \frac{3 \cdot (2 - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3})} =$$

$$\frac{3 \cdot (2 - \sqrt{3})}{2^2 + 2 \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3}^2} =$$

$$\frac{3 \cdot (2 - \sqrt{3})}{2^2 - \sqrt{3}^2} = \frac{3 \cdot (2 - \sqrt{3})}{4 - 3} =$$

$$\frac{3 \cdot (2 - \sqrt{3})}{1}$$

Con este procedimiento, logramos encontrar una expresión equivalente sin raíces en el denominador.

$$\frac{2}{(2 + \sqrt{3})} = 3 \cdot (2 - \sqrt{3}) = 6 - 3\sqrt{3}$$

$$\frac{a}{(\sqrt{b} + \sqrt{c})} = \frac{a \cdot (\sqrt{b} - \sqrt{c})}{(\sqrt{b} + \sqrt{c}) \cdot (\sqrt{b} - \sqrt{c})} = \frac{a \cdot (\sqrt{b} - \sqrt{c})}{\sqrt{b}^2 - \sqrt{c}^2} = \frac{a \cdot (\sqrt{b} - \sqrt{c})}{b - c}$$

Multiplicamos el numerador y el denominador por el binomio conjugado de este último para obtener así una diferencia de cuadrados y simplificar la raíz con la potencia.

¡A PENSAR!

1. Encuentren una expresión equivalente sin radicales en el denominador.

a. $\frac{2}{\sqrt{5}} =$ b. $\frac{3}{\sqrt[3]{25}} =$ c. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} =$ d. $\frac{1}{\sqrt{2}+3} =$ e. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} =$

2. Completen:

a. Para racionalizar la expresión $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$, se debe multiplicar el numerador y el denominador por

b. Para racionalizar la expresión $\frac{1}{\sqrt[5]{8}}$, se debe multiplicar el numerador y el denominador por

c. La expresión permite racionalizar a $\frac{(2+\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})}$.

d. Para que no queden radicales en el denominador debemos multiplicar el numerador y el denominador por en la expresión $\frac{1}{1+\sqrt{11}}$.

3. Bianca resolvió la siguiente actividad siguiendo estos pasos:

$$\frac{3}{\sqrt[5]{27}} = \frac{3 \cdot \sqrt[5]{27^4}}{\sqrt[5]{27} \cdot \sqrt[5]{27^4}} = \frac{3 \cdot \sqrt[5]{27^4}}{\sqrt[5]{27^5}} = \frac{3 \cdot \sqrt[5]{27^4}}{27} =$$

Camila, su prima, le dijo que estaba bien, pero que a ella le resultaba más sencillo expresar el 27 como 3^3 y, luego, racionalizar.

a. Resuelvan el ejercicio siguiendo los pasos de Camila.

4. Unan cada expresión con aquella que permita racionalizar su denominador:

a. $\frac{1}{\sqrt[4]{5^3}}$

$\sqrt{\pi}$

b. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}}$

$\sqrt{7}$

c. $\frac{2-\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$

$1+\sqrt{\pi}$

d. $\frac{3}{1-\sqrt{\pi}}$

$\sqrt{2}+\sqrt{7}$

e. $\frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{7}}$

$\sqrt[4]{5}$

5. Calculen el perímetro de un triángulo equilátero de $\frac{5}{\sqrt{7}}$ cm de lado y expresen el resultado sin radicales en el denominador.
6. Expresen en lenguaje simbólico y racionalicen de ser necesario.
 - a. El cociente entre cinco y la raíz cúbica de dos.
 - b. La razón entre tres y la suma de siete y la raíz cuadrada de tres.
 - c. La división entre el opuesto de cuatro y la raíz cuadrada de ocho.

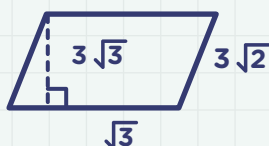
ACTIVIDADES INTEGRADORAS

1. Realicen una investigación sobre los sonidos de los números irracionales. Escaneen el QR y usen el video como guía. ¿Quién se anima a reproducirlos?

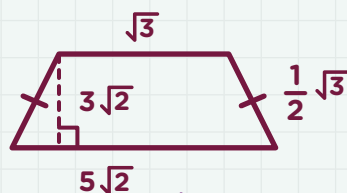


2. Calculen el área y el perímetro de las siguientes figuras:

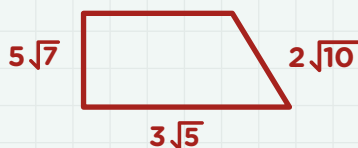
a.



c.



b.



d.



3. Resuelvan:

a. $\sqrt{1125} + \sqrt{720} - \sqrt{54} + 2 \cdot \sqrt{6} =$

d. $\sqrt{216} - 5\sqrt{726} + \sqrt{96} =$

b. $\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{147} =$

e. $\frac{3}{2}\sqrt{7} + 4\sqrt{28} - \sqrt{7} =$

c. $\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} =$

f. $-8\sqrt{24} - 5^2\sqrt{2} \cdot (7^2\sqrt{12} - 2\sqrt{3}) =$

4. Resuelvan trabajando con exponentes fraccionarios:

a. $\sqrt{8} \cdot \sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[5]{2^4} =$

d. $\sqrt[3]{7} : \sqrt[7]{3} \cdot 7^{\frac{5}{7}} =$

b. $3^2 \cdot \sqrt{3} : \sqrt[3]{3^2} =$

e. $\sqrt{25} \cdot \sqrt[3]{11} \cdot \sqrt[3]{5^3} \cdot 11^{\frac{5}{2}} =$

c. $\sqrt{5} : 5^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{5^2} =$

f. $11^2 \cdot (\sqrt{11^3} : \sqrt[3]{11} : \sqrt[4]{11^3}) =$

Capítulo 1

5. Unan cada binomio con su conjugado cuando sea posible:

a. $(\sqrt{5} - 2)$ $(\sqrt{5} - 3)$

b. $(\sqrt{5} - 3)$ $(-^3\sqrt{3} + ^3\sqrt{2})$

c. $(2 + \sqrt{5})$ $(-\sqrt{5} + 2)$

d. $(^3\sqrt{2^2} + ^3\sqrt{2})$ $(-^3\sqrt{3} - ^3\sqrt{2})$

e. $(\sqrt{5} + 3)$ $(\sqrt{5} + 2)$

6. Racionalicen para que no queden raíces en los denominadores:

a. $\frac{2}{3 - \sqrt{2}} =$

c. $\frac{3 + \sqrt{3}}{2\sqrt{5}} =$

e. $\frac{\sqrt{7} - 5}{\sqrt{7} + 5} =$

g. $\frac{7}{3^4\sqrt{4}} =$

b. $\frac{4 - \sqrt{6}}{\sqrt{3^5}} =$

d. $\frac{8}{1 - \sqrt{2}} =$

f. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} =$

7. Encuentren el valor de x:

a. $\sqrt{x} = 5^{\frac{1}{2}}$

d. $x \cdot \sqrt{7} = 3$

b. $^3\sqrt{3^2} \cdot x = 4 - ^3\sqrt{3}$

e. $3^{\frac{5}{3}} = 3 \cdot x$

c. $4 - \sqrt{5} = x \cdot \sqrt{5}$

f. $6^{\frac{3}{2}} = \sqrt{6^x}$

8. ¡A pensar para atrás! Encuentren la expresión cuya racionalización dio por resultado lo siguiente:

$$\frac{3^2\sqrt{5} - 3^2\sqrt{3}}{2}$$

9. Realicen un modelo de evaluación que incluya todo lo trabajado en este capítulo. Recuerden que los ejercicios deben ser elaborados por ustedes.

10. Llegó el momento del machete, realicen uno con los contenidos del capítulo y, luego, póngalo a prueba realizando el modelo de evaluación del ejercicio anterior (intercámbienlos con sus compañeros para resolverlos).