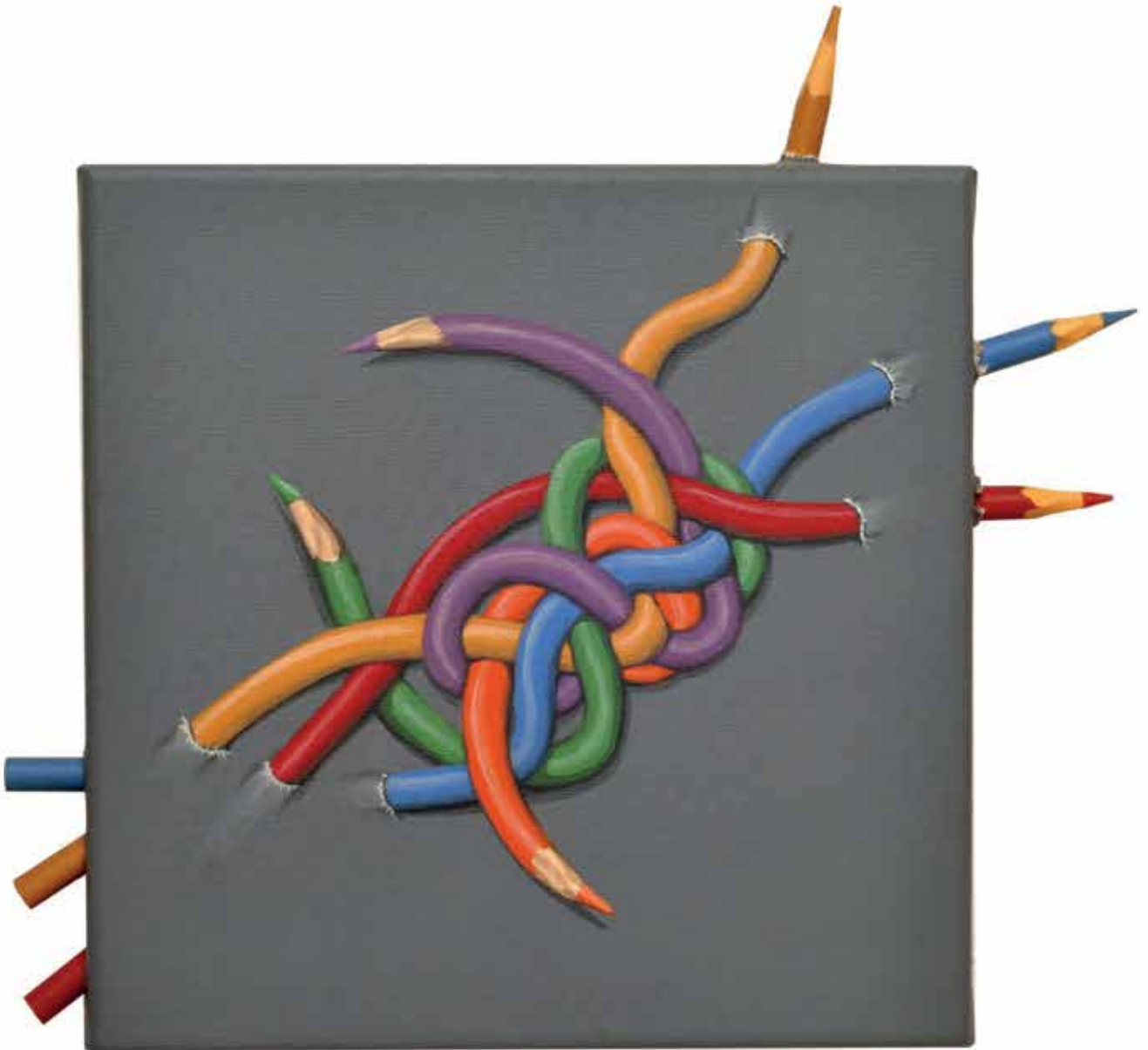


Laura Covelo, María Eugenia Covelo

MATEMÁTICA 3



NES

Muestra distribuida por la editorial

Índice

CAPÍTULO 1

NÚMEROS ENTEROS	8
RECORDANDO LO APRENDIDO	9
La negatividad de la matemática	9
MÚLTIPLOS Y DIVISORES EN ENTEROS	11
POTENCIAS Y RADICACIÓN EN ENTEROS	12
Inverso de un número	12
USAMOS LA CALCULADORA	14
ACTIVIDADES INTEGRADORAS	16

CAPÍTULO 2

NÚMEROS RACIONALES	18
RECORDANDO LO APRENDIDO	19
FRACCIONES CON LA CALCULADORA	21
PROPIEDADES EN RACIONALES	23
Propiedades de la radicación	23
Propiedades de la potencia	23
Sucesor de un número	24
ESTADÍSTICA CON RACIONALES	25
ACTIVIDADES INTEGRADORAS	30

CAPÍTULO 3

NÚMEROS IRRACIONALES	34
RECORDANDO LO APRENDIDO	35
IRRACIONALES	37
El racional de Pitágoras se hace irracional	37
Irracionales en la recta	40
Operaciones con irracionales	42
APROXIMACIÓN	50
NOTACIÓN CIENTÍFICA	52
ACTIVIDADES INTEGRADORAS	58

CAPÍTULO 4

EXPRESIONES ALGEBRAICAS	60
RECORDANDO LO APRENDIDO	61
Álgebra vs. aritmética	61
Círculo de potencias	62
CLASIFICACIÓN Y ELEMENTOS DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS	62
Expresiones completas y ordenadas	63
Valor numérico de una expresión algebraica	63

SUMA Y RESTA DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS	65
Suma de polinomios	66
MULTIPLICACIÓN CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS	69
PRODUCTOS NOTABLES	71
Producto de binomios conjugados	72
Producto de binomios iguales o cuadrado de un binomio	73
ECUACIONES	76
INECUACIONES	80
ACTIVIDADES INTEGRADORAS	83
 CAPÍTULO 5	
FUNCIONES	86
RECORDANDO LO APRENDIDO	87
El lenguaje de los gráficos	87
CONCEPTO DE FUNCIÓN	90
ANÁLISIS DE GRÁFICOS	93
FUNCIÓN LINEAL	99
SISTEMAS DE FUNCIONES LINEALES	107
Gráfico.....	110
Analíticos	110
ACTIVIDADES INTEGRADORAS	115
 CAPÍTULO 6	
GEOMETRÍA Y MAGNITUDES.....	118
RECORDANDO LO APRENDIDO.....	119
RAZONES Y PROPORCIONES	122
PROPORCIONALIDAD DIRECTA.....	125
PROPORCIONALIDAD INVERSA	126
Para resumir.....	127
SEMEJANZA Y CONGRUENCIA.....	135
SEMEJANZA Y CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS.....	136
Congruencia de triángulos.....	136
ACTIVIDADES INTEGRADORAS	141
 CAPÍTULO 7	
TRIGONOMETRÍA	143
RECORDANDO LO APRENDIDO	144
¿Cómo usar la calculadora científica y el sistema sexagesimal?.....	144
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS	146
¿Cómo usamos la calculadora?.....	148
RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS	151
Cálculo de $\hat{a}$	151
Cálculo de A	152
Cálculo de l	152

PENSEMOS JUNTOS UN PROBLEMA	153
TRANSFORMACIONES EN EL PLANO	154
Simetría axial	155
Simetría central	157
Traslación	159
Rotación	161
ACTIVIDADES INTEGRADORAS	164
 CAPÍTULO 8	
PROBABILIDAD, CÁLCULO COMBINATORIO Y ESTADÍSTICA	166
RECORDANDO LO APRENDIDO	167
PROBABILIDAD	167
CÁLCULO COMBINATORIO	170
Principio fundamental de conteo	171
Factorial	171
ESTADÍSTICA	173
Desviación estándar	173
ACTIVIDADES INTEGRADORAS	175
 ANEXO	
BIBLIOGRAFÍA	191

Capítulo 8

Probabilidad, cálculo combinatorio y estadística

Recordando lo aprendido

1. Expresen los siguientes números cómo fracciones:

a. 0,25

b. $0,\overline{5}$

c. $1,\overline{3}$

d. $2,\overline{32}$

e. $1,\overline{25}$

f. 0,8

2. ¿Cómo debe ser el numerador y denominador de una fracción para que represente un número decimal que pertenezca al intervalo $[0; 1]$?

3. Dividan por cuatro, 10 números consecutivos y anoten las respuestas obtenidas. ¿Qué parte decimal tienen? Comparen sus respuestas con las de sus compañeros.

4. Los mismos números del punto anterior divídanlos por tres e indiquen cómo es su parte decimal.

5. A partir de las actividades 3 y 4, extraigan conclusiones. Escribanlas en sus carpetas.

6. ¿Qué números se pueden obtener al tirar un dado?

7. Si se tiran dos dados, ¿cuáles son los posibles resultados que se pueden alcanzar al sumar lo obtenido? ¿Y al multiplicar?

8. Den cinco números que pertenezcan al intervalo $(2; 6]$.

9. Expresen como porcentaje las siguientes fracciones:

a. $\frac{2}{8}$

b. $\frac{1}{15}$

c. $\frac{7}{9}$

d. $\frac{1}{2}$

e. $\frac{10}{10}$

f. $\frac{0}{5}$

10. Calculen x:

a. $3 = \frac{x}{2}$

b. $\frac{8}{x} = 10$

c. $x = \frac{9}{4}$

d. $3 - x = \frac{5x - 2}{-3}$

e. $\frac{1}{x - 3} = \frac{-2}{3 \cdot (2x + 1)}$

Probabilidad

La **teoría de la probabilidad** es la rama de la matemática que estudia los fenómenos o experimentos aleatorios.

Decimos que un experimento es aleatorio si al repetirlo bajo las mismas condiciones iniciales, no siempre obtenemos el mismo resultado. Un ejemplo de esto es lanzar un dado o una moneda.

Se cree que el estudio de la probabilidad surgió al intentar resolver un problema en un juego de apuestas entre dos personas.

Dos jugadores eligen un número del 1 al 6, diferente del otro y apuestan 32 monedas de oro, a que el número elegido por ellos, sale tres veces antes que el número del contrario, al lanzar un dado.

En un momento del juego, uno de ellos había logrado que saliera su número una vez y el número del otro jugador dos veces. En ese instante, el juego se suspendió.

¿Cómo debían dividirse el dinero de la apuesta?

Probabilidad, cálculo combinatorio y estadística

Uno de los jugadores consulta a un matemático amigo llamado Blaise Pascal, quien a su vez le plantea el problema a Pierre de Fermat, otro matemático. Entre ellos, se inicia un intercambio de cartas, donde a lo largo de mucho tiempo discutieron y pensaron posibles soluciones. Si bien no se sabe con certeza cómo resolvieron el problema, permitió que a partir de ellos, y luego con el aporte de otros matemáticos, se plantearan las bases para el estudio de la probabilidad. ¡Cabe destacar que esto ocurrió en 1654, imaginen si hubieran tenido WhatsApp!

Analicemos nosotros el problema: si bien no sabemos con certeza cuál hubiera sido el número que salía si se seguían lanzando el dado, lo que si podemos saber es cuáles eran los posibles resultados. Sabemos que al tirar el dado podría haber salido un 1, 2, 3, 4, 5 o 6. A este conjunto de todos los posibles resultados, lo llamaron **espacio muestral**.

Un **suceso** es el resultado que efectivamente se obtiene al realizar un experimento aleatorio, debe pertenecer al espacio muestral. En el caso de los apostadores del problema, a ellos solo les era favorable un suceso, el que coincidía con el número que habían elegido. De los seis posibles resultados, solo uno les era favorable.

Pensemos ahora otra situación.

Camila tiene una bolsa con 10 caramelos de chocolate y dos de naranja, introduce la mano y saca uno sin mirar. ¿Qué gusto saldrá?

Intuitivamente, podemos decir que hay más probabilidad de que Camila saque un caramelo de chocolate ya que de los 12 (espacio muestral) 10 son de chocolate y solo dos de naranja. ¿Podría sacar uno de menta?

La probabilidad de que un suceso ocurra se puede calcular aplicando la ley de Laplace, que fue otro matemático que investigó sobre el tema.

$$\text{Probabilidad} = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}}$$

Probabilidad de sacar un caramelo de chocolate = $\frac{10}{12} = 0,8\widehat{3}$ que se puede expresar como porcentaje $83,3\widehat{3}\%$

Probabilidad de sacar un caramelo de naranja = $\frac{2}{12} = 0,1\widehat{6}$ expresado en porcentaje sería $16,6\widehat{6}\%$.

Probabilidad de sacar uno de menta = $\frac{0}{12} = 0$ expresado en porcentaje es 0%

Si la probabilidad de que un suceso ocurra es del 100%, quiere decir que los casos favorables y posibles son iguales. Por ejemplo:

Abril tiene una bolsa con ocho bolitas rojas, ¿qué probabilidad hay de que saque una roja?

Probabilidad de sacar una bolita roja = $\frac{8}{8} = 1$ que representa el 100%

La probabilidad de que un suceso ocurra es un número que pertenece al intervalo $[0;1]$, donde 0 representa un suceso imposible y 1 la certeza de que ocurrirá.

Capítulo 8

1. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un botón rojo, de una bolsa en donde hay dos rojos y cuatro azules?
2. Para cada una de las siguientes situaciones, indiquen el espacio muestral y la probabilidad pedida:
 - a. Se elige al azar un número natural menor que 30. ¿Cuál es la probabilidad de que el número elegido sea múltiplo de 5?, ¿y de 4?
 - b. Se divide un número natural por 3. ¿Cuál es la probabilidad de que la parte decimal sea 25 centésimos?, ¿tres periódicos?, ¿exacto?
3. En una bolsa, hay 10 pelotas numeradas del 21 al 30, algunas son amarillas y otras blancas.
 - a. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un número compuesto?
 - b. Si se sabe que la probabilidad de sacar una pelota amarilla es $\frac{1}{2}$, ¿cuántas hay de cada color?
4. Dentro de una caja, hay una carta negra, una roja, una verde y una blanca, escriban el espacio muestral en cada caso:
 - a. Se sacan dos cartas y, antes de sacar la segunda, la primera se regresa a la caja.
 - b. Se sacan dos cartas y, antes de sacar la segunda, la primera no se regresa a la caja.
5. En una reunión, hay 15 mujeres y 13 hombres. ¿Cuál es la probabilidad de que, al concluir, la primera persona que atraviese la puerta para retirarse sea un hombre?
6. En un armario, hay cinco camisas blancas, seis camisas negras, siete camisas amarillas. Se saca una de ellas sin mirar, ¿cuál es la probabilidad de que:
 - a. Sea blanca?
 - b. Sea amarilla?
 - c. No sea negra?
 - d. Sea blanca o negra?
7. Se lanzan dos dados al aire y se anotan los resultados obtenidos. Calculen:
 - a. La probabilidad de que sumen 7.
 - b. La probabilidad de que sumen par.
 - c. La probabilidad de que sea un múltiplo de tres.
8. Hallen la probabilidad de que al lanzar dos monedas al aire salgan las dos caras.
9. ¿Cuál es la probabilidad que tiene Mateo de ganar una rifa si compró ocho números de los 100 que estaban a la venta?
10. ¿Cuál es la probabilidad que, de un mazo de 40 cartas españolas, al dar vuelta una, sea de copa?, ¿que sea un 5?, ¿que sea un 8?
11. Una empresa que fabrica televisores sabe que cada 500 televisores uno de ellos puede tener un defecto. ¿Cuál es la probabilidad de comprar uno defectuoso?

Cálculo combinatorio

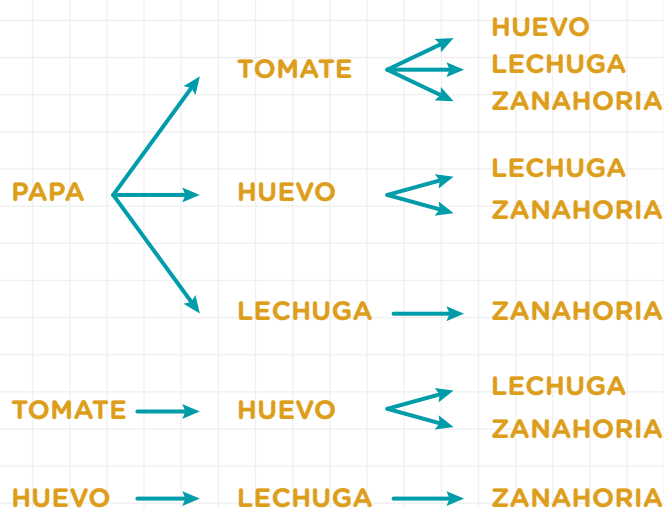
Abril y Maylén salieron a comer y pidieron la carta, ambas eligieron comer una ensalada. El mozo les dijo muy orgulloso que con los cinco ingredientes que tenían podían preparar 60 ensaladas diferentes de tres gustos. Las chicas se miraron sorprendidas y, a la vez, desconfiadas.

Hicieron su pedido, pero se pusieron a verificar lo que el mozo les dijo en una hoja.

Abril realizó el siguiente análisis:

Los ingredientes eran:

- Papa
- Tomate
- Huevo
- Lechuga
- Zanahoria



A partir de este gráfico, Abril pudo demostrarle al mozo que no era correcta la información que daba, solo se podían armar nueve ensaladas distintas.

El gráfico anterior recibe el nombre de **diagrama de árbol**, dado que se abre como las ramas de un árbol.

Al realizar estos conteos de casos, es importante ver cuando el orden de las cosas modifica o no nuestro resultado.

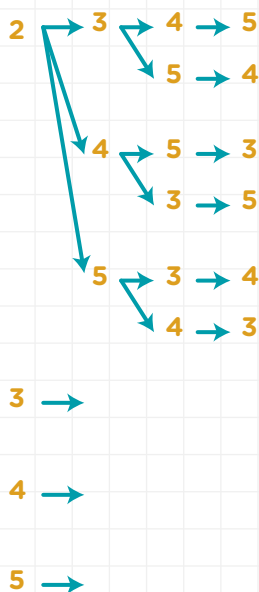
Una ensalada de papa, huevo y zanahoria es exactamente lo mismo que una de zanahoria, huevo y papa o una de huevo, papa y zanahoria.

Pero si pensamos en la combinación de un candado, ¿qué pasa? ¿La clave 123 sería la misma que 321 o 213?

En la ensalada, no importa el orden en el que se pongan los ingredientes, pero en el caso del candado sí, ya que obtenemos diferentes claves.

Capítulo 8

Como verán existen diferentes formas de ordenar o combinar resultados. Las **permutaciones** son agrupaciones en las que importa el orden de los objetos, como en el caso de la clave del candado. En las **combinaciones**, no importa el orden de los elementos, como en el ejemplo de la ensalada. Por ejemplo:



1. ¿Cuántos números distintos de 4 cifras se pueden armar con el 2, 3, 4 y 5, sin repetir los números? En primer lugar, hay que identificar qué es una permutación, ya que al cambiar el orden obtenemos un número distinto. Completen el diagrama de árbol.

Si contamos todas las opciones vemos que se pueden armar 24 números distintos.

2. Cinco primos juegan una carrera, ¿de cuántas maneras diferentes pueden cruzar la meta? Construyan un diagrama de árbol para esta situación.
3. En su fiesta de 15 años, Abril bailará el vals con 10 amigos, ¿de cuántas maneras distintas puede armar la lista para llamarlos? Podrían hacer un diagrama de árbol, pero sería realmente muy extenso, por eso podemos recurrir al:

Principio fundamental de conteo

Los posibles resultados de una situación, se pueden obtener multiplicando el número de formas que puede ocurrir cada evento.

En nuestro caso para armar la lista, Abril tiene 10 posibles amigos para bailar en primer lugar; para hacerlo en segundo lugar, solo le quedan 9 porque con uno ya bailó; para el tercer lugar, le quedan 8 y así sucesivamente.

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3.628.800 \text{ formas diferentes de armar la lista}$$

Este cálculo se puede escribir en forma matemática con la función:

Factorial

En la calculadora, encontrarán una tecla que como segunda función dice **x!**

El factorial de un número es el producto de él, por todos los anteriores hasta el uno.

$$2! = 2 \cdot 1$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$0! = 1 \text{ por definición}$$

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \dots 1$$

Probabilidad, cálculo combinatorio y estadística

1. ¿De cuántas maneras distintas se pueden sentar Camila, Abril, Maylén y Bianca en cuatro asientos consecutivos del cine?
2. Indiquen Verdadero (V) o Falso (F), justifiquen sus respuestas.
 - a. $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4!$
 - b. $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0$
 - c. $0! = 0$
 - d. $10! = 11! - 1!$
 - e. $0 = 4! + 5! - 9!$
3. Un anagrama es una agrupación de letras, aunque su orden no sea una palabra. ¿Cuántos anagramas se pueden formar con las letras de la palabra CIELO?, ¿y con MATEMÁTICA?
4. Simplifiquen las siguientes expresiones y resuelvan:
 - a. $\frac{5! \cdot 8!}{9! \cdot 6!} =$
 - b. $\frac{9 \cdot 8!}{9!} =$
 - c. $\frac{5 \cdot 6! \cdot 7}{4 \cdot 5!} =$
 - d. $\frac{15! \cdot 8!}{16! \cdot 11!} =$
5. Considerando los números impares del intervalo (0; 10):
 - a. ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar?
 - b. ¿Y de 5?
 - c. ¿Y si las cifras del número formado se pueden repetir?
6. Con los dígitos 2 y 5:
 - a. ¿Cuántos números de tres cifras pueden formarse?
 - b. ¿Cuántos son pares?
 - c. ¿Cuántos son mayores a 100?
 - d. ¿Mayores que 1000?
7. Actualmente, se pueden ver autos con patentes formadas por tres letras + tres números (sistema anterior) y otros que poseen dos letras + tres números + dos letras (nuevo sistema).
 - a. ¿Cuántas patentes de autos se pudieron hacer con tres letras y tres números?
 - b. ¿Y con el nuevo sistema?
8. En el restaurante de Felipe, hay una carta con tres entradas, cinco platos diferentes y seis postres. ¿Cuántos menús diferentes se pueden hacer?
9. ¿Cuántos códigos de ocho letras distintas se pueden armar con las primeras ocho letras del abecedario?
10. Con las 23 letras del abecedario, ¿cuántos códigos de ocho letras distintas se pueden hacer?
11. Matías, Felipe y Mateo fueron elegidos para portar la bandera nacional y ser escoltas. ¿De cuántas maneras distintas pueden ocupar su lugar?
12. Tres amigos fueron elegidos para ser delegados del curso. ¿De cuántas formas distintas pueden ocupar ese cargo? ¿En qué se diferencia este ejercicio del anterior?



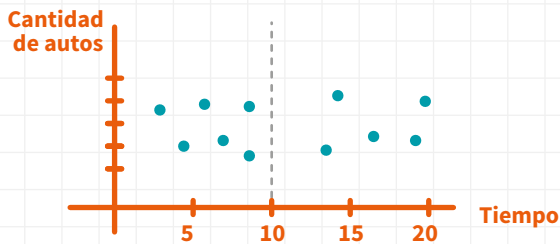
Estadística

Desviación estándar

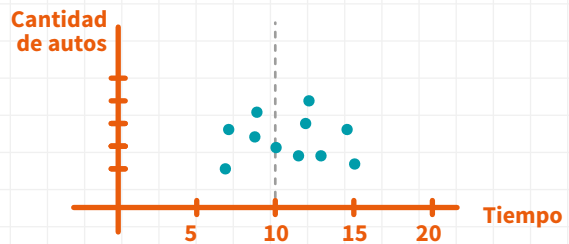
La desviación estándar mide la **dispersión** de una distribución de datos. Cuando más dispersa está, más grande será su desviación.

Los siguientes gráficos muestran el tiempo que permanecen los autos en una estación de servicio. La línea punteada indica el tiempo promedio (media).

A.



B.



La imagen B a diferencia de la A muestra que los datos están más concentrados en una zona de la gráfica.

La desviación estándar del gráfico A es aproximadamente de 8, esto quiere decir que el tiempo que los autos permanecen en la estación de servicio se aleja de la media en ocho minutos. En el gráfico B, el desvío es de 3, el tiempo de permanencia de los autos varía en tres minutos respecto de la media.

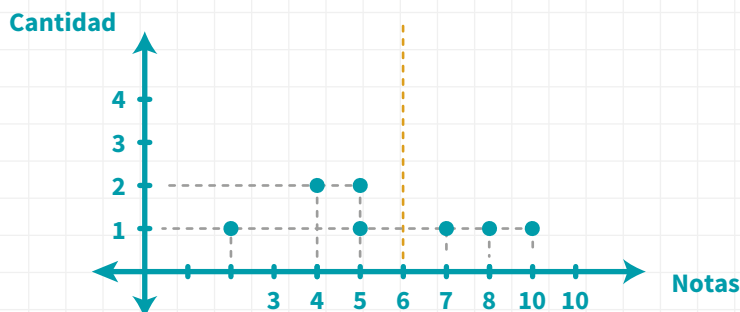
La desviación será menor, cuanto más cercano estén los datos a la media. Una desviación de 0 indicaría que todos los datos coinciden con la media.

Las siguientes son las notas de ocho alumnos:

3, 4, 4, 5, 5, 7, 8, 10

La nota promedio es de $\frac{3+4+4+5+5+7+8+10}{8} = \frac{48}{8} = 6$

Al graficar los datos:

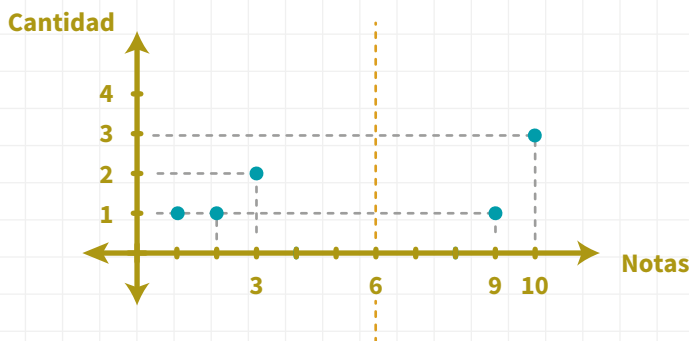


Veán ahora la siguiente situación de otros ocho alumnos y sus notas:

3, 3, 2, 1, 9, 10, 10, 10

La nota promedio también es de 6 = $\frac{3+3+2+1+9+10+10+10}{8} = \frac{48}{8} = 6$

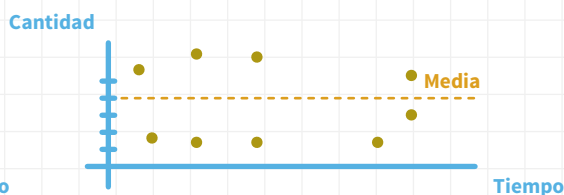
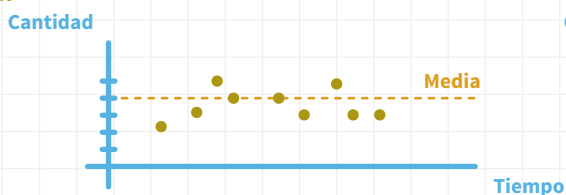
Al graficar los datos:



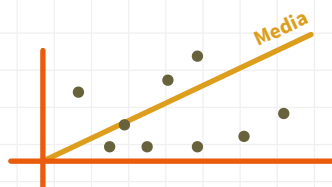
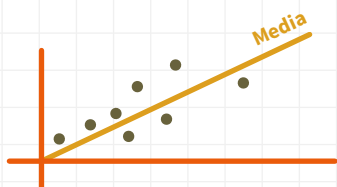
¿Qué se pueden decir al comparar las dos situaciones?

1. Indiquen cuál de los gráficos posee menor desvío.

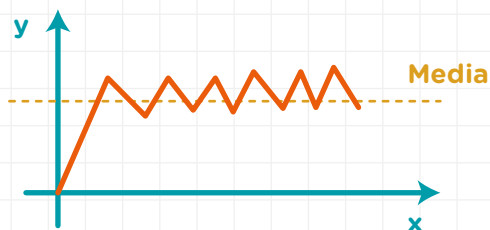
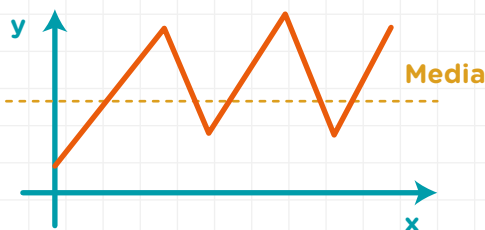
a.



b.



c.



2. Camila midió el crecimiento (en mm) de las plantas de su huerta y obtuvo los siguientes resultados:

Tomate	150 mm
Lechuga	100 mm
Ají	200 mm
Acelga	180 mm
Zanahoria	90 mm
Ajo	50 mm
Papas	200 mm
Apio	100 mm

a. Calculen la media

b. Realicen un gráfico.

c. ¿Qué pueden decir con respecto a la dispersión de los datos?

3. Las siguientes afirmaciones corresponden a la propiedad del desvío estándar. Coméntennlas y justifíquenlas.

a. La desviación estándar será siempre un número positivo.

b. Si la desviación es 0, es porque todos los datos de la muestra son iguales.

c. Cuanto más pequeña sea la desviación estándar, mayor será la concentración de datos alrededor de la media.

4. El gerente de una empresa le pide a un empleado que tome al azar 10 paquetes de fideos y los pese. Luego de hacerlo, le informa que, cada uno debería pesar 500 gramos, pero encontró que el peso medio era de 509 gramos con un desvío de 12. ¿Qué conclusiones puede sacar el gerente con estos datos?

5. Piensen una situación en la cual el análisis del desvío permita tomar una decisión y desarróllenla. Inventen una muestra de datos y grafíquenlos.

ACTIVIDADES INTEGRADORAS

1. ¿Cuál es la probabilidad de ganar la lotería, si se juega a las tres cifras?

2. Si la probabilidad de salir electo en un sorteo es de 0,04, ¿cuántas personas participaron del sorteo?

3. ¿Cuántos números compró Matías en una rifa, si se vendieron 500 números y él tiene una probabilidad de ganarlo de 0,02?

4. ¿De cuántas formas distintas pueden asignarse seis puestos de trabajo a seis empleados?

5. Hay cinco puestos para asignar entre ocho empleados. ¿Cuántas opciones distintas hay de hacerlo?

6. En un curso de 30 alumnos, se arman grupos de cinco. ¿Cuántas opciones distintas hay de armar esos grupos?

7. Mateo se olvidó de estudiar para la lección de geografía:
 - a. ¿Qué posibilidad tiene de que lo llamen a él de entre sus 30 compañeros?
 - b. Si la profesora ya llamó a cinco compañeros, ¿qué probabilidad hay de que le toque a él ser el próximo?
8. Una muestra de 10 autos que pasaron por la autopista, registraron las siguientes velocidades expresadas en km/h:

90, 95, 80, 110, 100, 80, 90, 100, 60, 80

- a. Hagan un cuadro de frecuencias y calculen la media.
 - b. Grafiquen y marquen con color la media.
 - c. ¿Qué pueden inferir del desvío?
9. Un empleado de control de tránsito informó que los autos están estacionados un tiempo promedio de tres horas, con un desvío de 30 minutos. ¿Qué quiere decir?
 10. ¿Cuál es el desvío de una muestra, si todos los datos tomados son iguales?

ISBN 978-987-8321-10-3



Muestra distribuida por la editorial